

Reforçando a relação entre a matemática e a física no ensino médio através de exemplos básicos de mecânica clássica



R. R. Medina e J. A. Souza

UFSCar - Sorocaba

Março/2017

Prefácio

Este produto educacional foi desenvolvido para motivar o professor de física do ensino médio a utilizar a matemática não só como uma ferramenta, mas como algo intrínseco e inseparável da física. Nos últimos anos as ideias e técnicas desenvolvidas na física tem mudado dramaticamente e o que tem sido exposto para os alunos, através dos meios de comunicação, é um mundo de tecnologias que resolvem tudo bastando apertar alguns botões para a solução de problemas. Na verdade o que está por trás disso são análises criteriosas em laboratório e modelagens de sistemas, ambos utilizando, na maioria dos casos, técnicas computacionais, teóricas e experimentais avançadas em que a matemática tem um papel fundamental.

Este material está organizado de forma a trabalhar a matemática em cada etapa de um curso introdutório

de física utilizando alguns poucos exemplos da mecânica clássica, como leis de Newton, a obtenção de uma lei de movimento seguindo as ideias de Aristóteles, descrição da equação de movimento de sistemas mais complexos, como o movimento de um carro em uma pista inclinada com atrito e o oscilador harmônico simples, e a análise do movimento destes sistemas através de gráficos. Antes da apresentação e discussão destes sistemas, apresentamos no primeiro capítulo algumas sugestões de como este produto pode ser aplicado em sala de aula. Além disso, nos preocupamos em deixar claro para o professor no segundo capítulo, como a matemática pode ser essencial para auxiliar a nossa intuição, com o objetivo de motivar o aluno a desenvolver argumentos fundamentados e sólidos para justificar suas ideias. Tudo foi desenvolvido utilizando uma linguagem acessível para o aluno do ensino médio abordando tópicos básicos sobre funções, vetores e suas projeções, versores, o significado físico de equações vetoriais e sistema de coordenadas cartesiano. Esperamos que o professor de física utilize este material como um objeto norteador em suas atividades e que possa estender a proposta para outros tópicos da física.

À todos os alunos do Ensino Médio Público.

Sumário

1	Sobre a aplicação do produto	1
2	A matemática e a nossa intuição	5
3	Modelagem matemática de um fenômeno físico	11
4	A utilidade das funções na ciência	21
5	Newton vs. Aristóteles	25
6	Equação geral e seus casos particulares	37
7	Força variável: Movimento Harmônico Simples	57

8 Movimento Harmônico Simples em Gráficos 73

Capítulo 1

Sobre a aplicação do produto

Durante o desenvolvimento dos capítulos deste produto nós tentamos expressar nossas ideias da forma como este foi aplicado na sala de aula. Você perceberá que nós conduzimos os temas através de perguntas. Atualmente os alunos são muito passivos de modo que, se nós esperarmos as perguntas partirem deles, nós nos decepcionaremos. O próprio professor pode conduzir os alunos a algumas perguntas à medida que o tema é desenvolvido em sala de aula. Em algumas situações,

tentamos colocar os alunos em contradição para ver se eles realmente entendiam o assunto.

Em um primeiro momento você pode fornecer as respostas acompanhadas de um “será”. Por exemplo, será que a projeção da posição da partícula em movimento circular uniforme no eixo x é dada por um cosseno? É necessário tomar cuidado nesses momentos, porque à medida que forem estabelecidas perguntas que fornecem a resposta correta ao problema os alunos simplesmente confirmarão a pergunta com um balançar positivo de cabeça por comodidade. É nesse momento que é possível colocá-los em contradição para forçá-los a pensar. Portanto, em vez de um cosseno, você poderia perguntar, será que a projeção da posição da partícula em movimento circular uniforme no eixo x é dada por um seno? Independente da resposta, nós sempre damos seguimento à discussão com um por quê?

Quando criança, todos nós temos a tendência de estabelecer uma cadeia de porquês incessante ao questionar tudo o que vemos. À medida que os pais respondem um outro porquê surge e assim por diante, até que os pais ou outros se cansam e respondem porque sim! Nas

escolas não é diferente. Em várias situações o professor responde ao aluno com um porque sim ou porque está no livro, ou ainda gera algum constrangimento pela pergunta feita, etc. Isso acaba destruindo a maravilhosa cadeia de porquês dos alunos, tornando-os completamente passivos e envergonhados. O que nós fizemos nesta proposta foi recriar essa cadeia, estimulando o questionamento em todas as situações convencendo os alunos de que, aluno bom é aquele que pergunta. Não existem perguntas idiotas ou vazias. Pelo contrário, se o aluno faz uma pergunta completamente sem sentido e fora de contexto com o que o professor está discutindo, este é o momento perfeito para o professor diagnosticar problemas de contextualização e de entendimento do assunto em questão.

Estas são apenas algumas sugestões que podem ser consideradas para a aplicação desta proposta. Esperamos que o professor do ensino básico aproveite este material e que o mesmo seja útil para melhorar suas aulas de física com o auxílio da matemática, assim como foi para nós.

Capítulo 2

A matemática e a nossa intuição

Ideias e imaginação são produtos da nossa mente criativa. Descobrir novas ideias e aplicações pode ser muito recompensador. Encontrar a resposta certa é somente uma parte do pensamento científico e esta pode desencadear uma variedade de novos caminhos e descobertas. Em ciências geralmente começamos com uma hipótese para solução de problemas. Nós “achamos” que uma aplicação pode dar certo ou não, que um modelo pode descrever determinados dados experimentais

ou que alguma análise no laboratório pode estar incorreta. Uma hipótese precisa vir acompanhada de fundamentação para que nossos argumentos se tornem robustos o bastante para que possamos convencer outras pessoas a investirem não só dinheiro e tempo em algumas ideias, mas também para criar meios para que essas ideias evoluam. Para isso a matemática é essencial.

Mostraremos isso com um exemplo muito simples em que, a princípio, é inviável realizar o experimento para comprovarmos uma hipótese. A fundamentação que precisamos será fornecida pela matemática.

Considerando a circunferência de uma moeda qualquer envolvida por um barbante de maneira bem ajustada, pergunte aos alunos se, após aumentarmos 1 metro no comprimento do barbante, dado pelo comprimento da circunferência da moeda, a folga entre a moeda e o barbante é maior, menor ou igual à folga entre um barbante e o planeta Terra nas mesmas condições. Para facilitar a visualização do problema utilize ilustrações como as mostradas na Fig.2.1.

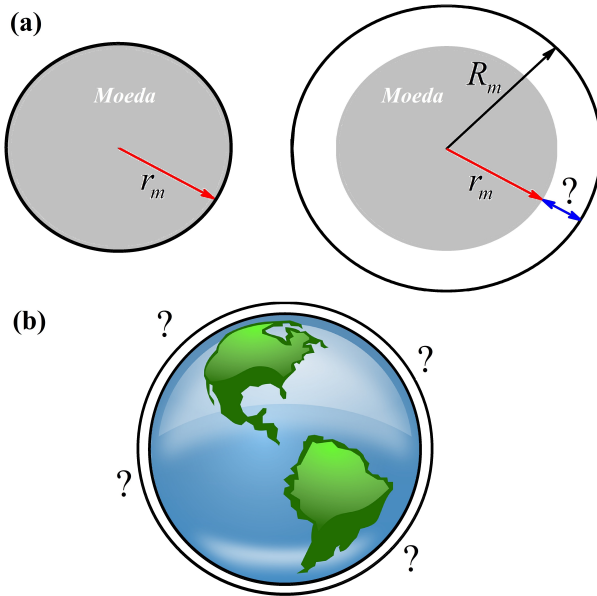


FIGURA 2.1: (a) Ilustração de uma moeda de raio r_m envolvida por um barbante de forma bem ajustada mostrando a nova circunferência de raio R_m formada pelo barbante após acrescentarmos 1m em seu comprimento. O ponto de interrogação é a folga $R_m - r_m$ que os alunos precisam discutir se será maior, menor ou igual à folga entre o barbante e o planeta Terra nas mesmas condições (b).

Em todos os cenários que utilizamos este exemplo, a maioria dos alunos responderam que a folga entre o raio da Terra e o barbante, após o acréscimo de 1 metro em sua circunferência, é muito menor que no caso da moeda. As respostas geralmente estão alicerçadas no ar-

gumento de que 1 metro é uma distância muito pequena diante da dimensão do raio do planeta Terra, enquanto que para a moeda é muitas vezes maior que o seu raio. A ideia aqui é convencer os alunos de que é necessário apelarmos para algum tipo de equacionamento para chegarmos a uma conclusão plausível, pois os argumentos baseados apenas na intuição são pouco convincentes e insuficientes para um desfecho satisfatório do problema.

Se chamarmos o raio da moeda de r_m , o raio da Terra de r_T e os novos raios, após o acréscimo de 1m no comprimento da circunferência de ambos, de R_m e R_T , respectivamente, tem-se para a moeda,

$$\begin{aligned} 2\pi r_m + 1 &= 2\pi R_m \\ R_m - r_m &= \frac{1}{2\pi}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

em que $R_m - r_m$ é a folga entre a moeda e o barbante.

Realizando o mesmo procedimento para o planeta Terra, obtemos para a folga entre a Terra e o barbante $R_T - r_T = 1/2\pi$. Ou seja, a folga é a mesma nas duas situações e mede em torno de 16cm. O resultado matemático nos diz que a folga é independente do raio da circunferência do corpo envolvido pelo bar-

bante. Portanto, a eq.(2.1) nos diz que se realizarmos o experimento envolvendo a circunferência de uma bola de futebol ou a circunferência de qualquer outro objeto ou planeta com um barbante, o resultado será sempre o mesmo. Isso pode ser confirmado em sala de aula através de experimentos simples utilizando uma moeda e outros objetos que tenham simetria esférica ou cilíndrica, como um copo, uma garrafa ou um cesto de lixo.

Este resultado geralmente choca muitos alunos que, mesmo diante de um procedimento bem elaborado matematicamente, resistem em acreditar que não há diferença. Este tipo de resistência e conflito é muito comum no ensino de ciências, porque os alunos possuem suas próprias concepções.

Este é apenas um exemplo de que é possível chamar a atenção dos alunos para a necessidade de confirmarmos formalmente ideias intuitivas, independentemente da área do conhecimento. Nas ciências isso é imprescindível, pois em muitos casos não é possível realizarmos o experimento de imediato para confirmarmos nossas hipóteses, seja por questões financeiras ou por limitações tecnológicas da época. Como um aluno pode-

ria envolver o planeta Terra com um barbante utilizando apenas suas habilidades motoras e de observação, para comprovar sua hipótese sobre o tamanho da folga obtida em comparação com a mesma utilizando-se uma moeda? Felizmente, nada nos impede de tratar o sistema matematicamente e chegar a uma conclusão plausível.

Capítulo 3

Modelagem matemática de um fenômeno físico

A partir da modelagem de um fenômeno físico em estudo é possível abstrair uma enorme quantidade de informações, mesmo que os alunos não tenham observado o fenômeno em uma aula prática ou no dia a dia. Para isso podemos utilizar exemplos de qualquer área da física, como o primeiro postulada da teoria da relatividade restrita de Einstein. Este trata do princípio da

constância da velocidade da luz que diz que, a velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor c em todos os referenciais inerciais, independentemente do movimento relativo da fonte e do observador. Este exemplo é pertinente porque Albert Einstein é uma figura popular e conhecido por todos. A possibilidade do aluno estar em contato com a teoria de um cientista tão famoso e brilhante pode despertar o interesse no assunto.

Após a contextualização sobre referenciais inerciais e movimento relativo pergunte aos alunos como Einstein poderia ter chegado à conclusão de que a velocidade limite do universo é c e por qual razão esta é uma constante. A utilização de teorias de cientistas famosos também pode ser muito útil para mostrar para os alunos que o conhecimento científico pode ser acessado por todos e não apenas por alguns poucos com uma genialidade, que eles acreditam ser inalcançável. Veja como a matemática pode nos auxiliar neste caso.

A partir das equações de Maxwell do eletromagnetismo é possível concluir que a luz é uma onda eletromagnética através de um resultado obtido matematicamente, que nos diz que $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$. Este é precisa-

mente a velocidade da luz no vácuo obtida experimentalmente ($c \approx 300.000\text{km/s}$) e os parâmetros μ_0 e ε_0 são constantes da natureza que nos diz o quão permeável é o vácuo para linhas de campos magnéticos e elétricos, respectivamente. Com esta contextualização, não é difícil concluir que se μ_0 e ε_0 são constantes, necessariamente c também é uma constante da natureza.

Para mostrar que a velocidade da luz é a velocidade limite do universo para transmissão de informação pode-se utilizar a fórmula da contração de Lorentz, dada por:

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (3.1)$$

a qual especifica a relação entre o comprimento L de um objeto que se move a uma velocidade v com relação a um observador, e seu comprimento L_0 , medido quando o objeto está em repouso. Fazendo uma análise matemática da raiz quadrada da eq.(3.1) é possível mostrar que, para obtenção de um número real e diferente de zero para L , necessariamente precisamos ter $v < c$. Essa condição é necessária porque o comprimento do objeto é uma propriedade física, ou seja, este deve ser expresso por

números reais. Mesmo que a raiz exista para $v = c$, não tem sentido físico a partícula desaparecer ($L = 0$) porque sua velocidade é igual a velocidade da luz. Isto mostra claramente a necessidade da matemática e da física caminharem juntas. Se $v > c$ teremos uma raiz negativa, portanto não expressa a realidade física do objeto. Logo, a conclusão é que a velocidade do objeto será sempre menor que a velocidade da luz, $v < c$, ficando assim demonstrado matematicamente que a velocidade c é uma velocidade limite. Existem vários experimentos com partículas que comprovam este resultado e que podem ser mencionados para trazer ainda mais credibilidade à necessidade do tratamento matemático de sistemas em um curso de física.

Este tipo de análise também pode ser feita a partir de exemplos do cotidiano dos alunos, como o ilustrado na Fig.3.1. Na Fig.3.1(a) é apresentada a reação normal \vec{N}_1 de uma superfície curva, com raio de curvatura R , em um veículo de peso mg se movendo com uma velocidade \vec{v} , como se o motorista estivesse passando no ponto mais alto de um morro. A contextualização também pode ser um aluno em uma bicicleta passando por uma lombada.

Na Fig.3.1(b) temos o mesmo veículo passando agora pelo ponto mais baixo de um declive com o mesmo raio de curvatura e reação normal da superfície dada por \vec{N}_2 .

Antes de iniciar os cálculos é importante deixar claro para os alunos que, se o veículo estiver executando um movimento retilíneo uniforme (MRU), ou seja, se movendo com velocidade constante \vec{v} e resultante nula, em uma superfície plana, a reação normal da superfície é igual à força peso do veículo, $N = mg$. É interessante provocar os alunos com perguntas para continuar a discussão, como por exemplo: E no caso de uma superfície curva, como na Fig.3.1, como devemos proceder? Note que estamos introduzindo uma forma um pouco mais complexa de movimento contextualizada por uma forma de movimento mais simples que eles já conhecem, que é o MRU.

Neste exemplo não é necessário considerarmos que o movimento circular executado pelo veículo seja uniforme, pois nós estamos abordando apenas o movimento no ponto mais alto da trajetória, em (a), e mais baixo, em (b). Portanto, temos um exemplo de movimento circular. Como o movimento é circular a resultante

agora é a força centrípeta $F = mv^2/R$.

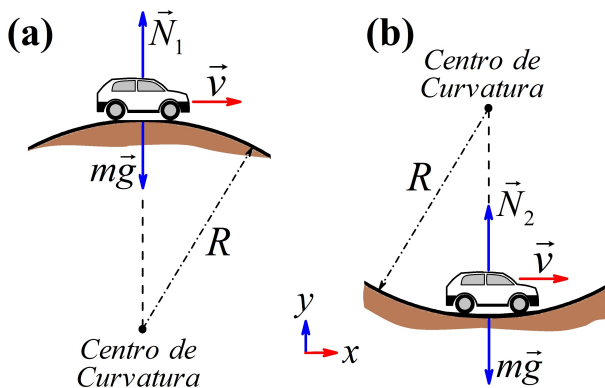


FIGURA 3.1: (a) Veículo com velocidade \vec{v} se movendo em uma superfície com raio de curvatura R , passando pelo ponto mais alto da superfície. (b) Ilustramos o mesmo veículo passando pelo ponto mais baixo de um declive com mesmo raio de curvatura. São apresentadas a reação normal da superfície \vec{N}_1 e \vec{N}_2 , para (a) e (b), respectivamente, e a força peso $m\vec{g}$.

Considerando os eixos coordenados x e y na direção da velocidade e da força normal, respectivamente, temos pela segunda lei de Newton para a Fig.3.1(a) que,

$$\begin{aligned} \vec{F}_{Ry} &= \vec{N}_1 + m\vec{g} \\ -m\frac{v^2}{R} &= N_1 - mg \\ N_1 &= mg - m\frac{v^2}{R}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Analisando o resultado matemático obtido, observe

que nesta situação a reação normal da superfície é menor que a força peso, diferentemente do resultado obtido para o veículo se movendo em uma superfície plana, em que $N = mg$. Questione os alunos se este resultado faz sentido.

Prossiga realizando perguntas: E no caso da Fig.3.1(b) o que temos? Utilizando o mesmo procedimento obtemos,

$$\begin{aligned}\vec{F}_{Ry} &= \vec{N}_2 + m\vec{g} \\ m\frac{v^2}{R} &= N_2 - mg \\ N_2 &= mg + m\frac{v^2}{R}.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Observe que agora a força normal é maior que a força peso por um fator dado pela resultante centrípeta. Note que nesta situação o sinal da força centrípeta é positivo, pois esta aponta na direção positiva do eixo coordenado y . Continue questionando: Mas este resultado matemático faz sentido? Quais informações físicas podemos abstrair dessas duas situações?

Na situação (a) obtemos $N_1 < mg$ enquanto que em (b), $N_2 > mg$. Se a força normal for menor que a

força peso, pode existir uma condição em que o veículo perderá o contato com a superfície, ou seja, $N_1 = 0$. Na verdade essa condição existe e é dada pela velocidade $v = \sqrt{gR}$, conforme eq.(3.2) quando fazemos $N_1 = 0$. Quem nunca rampou com uma bicicleta em uma lombada? O resultado matemático nos diz que isso é possível.

E no caso (b) será que é possível ramparmos no declive, ou seja, $N_2 = 0$? Naturalmente os alunos respondem que isso é impossível, pois praticamente todos já experimentaram essa situação quando passam por um declive. Eles notam que o veículo fica mais “colado” na pista, o que explica o resultado $N_2 > mg$. Se o nosso modelo matemático for bom o suficiente para descrever a realidade, precisamos necessariamente abstrair essa informação do resultado. Considerando $N_2 = 0$ em (3.3), obtemos $v = \sqrt{-gR}$. Portanto, o resultado matemático nos diz que é impossível obtermos uma velocidade de modo que o veículo perca o contato com a superfície no ponto mais baixo do declive, pois a raiz negativa não tem significado físico. Isto está em perfeito acordo com o que observamos, pois como já discutido, o veículo adere

à pista ainda mais, uma vez que $N_2 > mg$.

Note a quantidade de informações que conseguimos obter a partir da modelagem matemática do sistema. Isso mostra aos alunos que a física, auxiliada por uma matemática adequada, pode ser muito útil para previsão de diversos fenômenos. Outros exemplos sobre a abstração de informações de um fenômeno físico a partir de sua modelagem matemática serão dados nos capítulos que seguem.

Capítulo 4

A utilidade das funções na ciência

Matematicamente falando, uma função fornece um único valor de $f(x)$ para cada valor do parâmetro x . No exemplo da contração de Lorentz, descrito no capítulo anterior, temos uma função que fornece um único valor para o comprimento L para cada valor da velocidade v , ou seja, $L = L(v)$. Portanto, é possível concluir que as funções são utilizadas em ciências para estabelecermos relações entre propriedades físicas.

Estas podem ser de diversas formas, lineares, po-

linomiais, exponenciais, senoidais, etc. nos fornecendo muita informação sobre o comportamento de propriedades físicas quando alguns parâmetros do sistema são modificados como a velocidade, força, temperatura, pressão, energia, entre outros.

Além das funções que descrevem o comportamento dos sistemas que estão sendo tratados em determinada aula, utilize outras de outros tópicos da física ou mesmo outras áreas do conhecimento como a biologia ou química, pois a ideia é mostrar a utilidade das funções nas ciências. Como exemplo podemos considerar a equação que descreve a lei dos gases ideais dada por $PV = nRT$, em que P é a pressão no gás, V o seu volume, n o número de mols do gás, R a constante universal dos gases e T a sua temperatura. Se quisermos saber como o volume de um gás ideal se comporta à medida que variamos a pressão aplicada no mesmo, podemos escrever

$$V = \frac{nRT}{P}, \quad (4.1)$$

ou seja, temos a função $V = V(P)$. Essa relação entre V e P nos mostra que se considerarmos um processo em que a temperatura T do gás é mantida constante, o vo-

lume do mesmo diminuirá (aumentará) se aumentarmos (diminuirmos) a pressão aplicada no gás.

A eq.(4.1) também fornece a função $V = V(T)$ se considerarmos um processo em que a pressão é constante. Neste caso à medida que a temperatura do gás aumenta (diminui) o seu volume também aumenta (diminui). As funções descritas nestes dois processos são uma hipérbole e uma reta, respectivamente, e estão esboçadas nos gráficos da Fig.4.1.

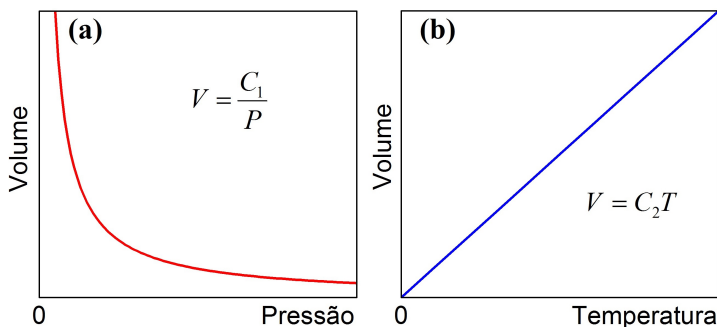


FIGURA 4.1: **(a)** Esboço do gráfico do volume pela pressão para um processo isotérmico ($T = cte$) obtido a partir da função descrita na eq.(4.1). A função neste caso é uma hipérbole com constante $C_1 = nRT$. **(b)** Mostramos o volume em função da temperatura para um processo isobárico ($P = cte$). A função agora é linear com coeficiente angular dado por $C_2 = nR/P$.

Conhecer essas relações pode nos permitir prever

o comportamento de sistemas nunca observados na natureza ou no laboratório.

Capítulo 5

Newton vs. Aristóteles

Neste capítulo apresentaremos algumas regras e princípios da mecânica clássica através da elaboração de uma lei de movimento a partir das ideias de Aristóteles e da segunda lei de Newton. Ao final vamos comparar as duas leis de movimento para mostrar quais foram os enganos cometidos por Aristóteles.

O papel da mecânica clássica é predizer o futuro. Isso significa que se nós sabemos tudo sobre um sistema em um determinado instante de tempo, e se nós sabemos as equações que governam como o sistema muda no tempo, então nós poderemos predizer o futuro do

mesmo. Dessa forma teremos condições de dizer onde o sistema estará em um tempo posterior. É isso que significa dizer que as leis da física clássica são *determinísticas*. Esta é uma palavra chave essencial para introduzir tópicos mais abstratos da física, como a mecânica quântica. Da mesma forma, se for possível descrever o passado do sistema utilizando os mesmos procedimentos e equações, nós dizemos que o sistema é *reversível*. Ou seja, a mecânica clássica nos permite dizer para onde o sistema vai e de onde o sistema veio utilizando as mesmas leis de movimento.

Para obtermos as equações de evolução de um sistema precisamos de uma *lei física*. Um sistema que evolui no tempo é chamado de *sistema dinâmico*. Portanto, nós precisamos de uma lei dinâmica que nos forneça as regras sobre como prever o futuro do sistema. Ou seja, nós queremos descobrir para qual *estado* o sistema evoluirá a partir de um estado inicial conhecido. Este estado inicial fica completamente determinado se soubermos a posição e a velocidade do sistema. Os alunos ainda podem perguntar, mas o que é um sistema? Um *sistema* pode ser um ou uma coleção de objetos dados

por partículas, campos, ondas entre outros.

Para resolução de problemas sobre dinâmica utilizamos a segunda lei de Newton,

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (5.1)$$

em que a força resultante \vec{F} é dada pelo produto da massa m do objeto pela sua aceleração \vec{a} . Em outras palavras, a força é igual a massa vezes a taxa com que a velocidade do objeto muda, uma vez que $\vec{a} = \Delta\vec{v}/\Delta t$. Note que nós podemos abstrair uma informação muito importante da eq.(5.1). Se não há força aplicada em um corpo, não há mudança em sua velocidade, ou seja, não há mudança no estado de movimento do corpo. Mas esta informação só pode ser obtida se olharmos para a forma matemática da eq.(5.1). Note que esta é uma equação vetorial, pois ambas a força e a aceleração são vetores.

Mas o que é um vetor?

Para um matemático as vezes é suficiente dizer que o comprimento de um seguimento de reta é cinco. Um físico ou engenheiro ou até mesmo uma pessoa de outra área do conhecimento iria querer saber, “Cinco o quê?”. Cinco metros, cinco milímetros ou cinco anos luz? Ou

seja, em ciências precisamos fornecer as unidades das grandezas físicas. Expressamos a força em newtons (N), a massa em quilogramas (kg), o tempo em segundos (s), entre outros. Quando um número e uma unidade de medida é suficiente para descrever uma propriedade física, como no caso da massa, da temperatura, do tempo, etc. estamos trabalhando com uma grandeza *escalar*. Por outro lado, para descrevermos uma força ou a aceleração de um corpo, precisamos acrescentar ao escalar, que descreve a magnitude da grandeza, a sua direção e o seu sentido. Isso é um *vetor*. É por isso que dizemos que a força resultante em um corpo possui a direção de seu movimento, pois a equação vetorial dada por (5.1) nos diz que o vetor força é diretamente proporcional ao vetor aceleração. Portanto, se existir alguma força resultante sendo aplicada em um sistema significa que o vetor velocidade do mesmo está mudando. Isso implica que a força pode provocar apenas uma mudança na direção da velocidade, ou do movimento, e não necessariamente na sua magnitude. Como exemplo, podemos citar a força centrípeta em um movimento circular uniforme.

Para representarmos a magnitude, a direção e o

sentido das propriedades físicas de um corpo em movimento, por exemplo, nós precisamos de um *sistema de coordenadas*. Sua construção começa com a escolha de um ponto do espaço para ser a origem do sistema de coordenadas. É isso que nós chamamos de *referencial*. O movimento do corpo será representado e descrito matematicamente com relação a esta posição de referência. A escolha desta referência é arbitrária, isso significa que a origem do seu sistema de coordenadas pode ser colocada em qualquer lugar. Geralmente a escolha da origem é feita para fazer com que as equações de movimento se tornem o mais simples possível. O próximo passo é escolher três eixos perpendiculares. Estes também podem ser colocados em qualquer posição, desde que os mesmos sejam perpendiculares. Os eixos são usualmente chamados de x , y e z , mas nós também podemos chamá-los de x_1 , x_2 e x_3 , de a , b e c , ou qualquer outro nome que você queira atribuir aos mesmos. Este sistema de eixos é chamado de *sistema de coordenadas cartesiano*. O professor também pode mencionar a existência de outros tipos de sistemas de coordenadas como polares, cilíndricas, esféricas e outros que são explorados de acordo com a

simetria do problema para facilitar os cálculos.

Após a escolha de um referencial podemos representar não só o valor da velocidade de um objeto, por exemplo, mas também a direção e o sentido em que o mesmo está se deslocando, como ilustrado na Fig.5.1. O mesmo ocorre quando descrevemos a posição de um navio no oceano, a de um aluno na sala de aula ou mesmo uma localização arbitrária utilizando um GPS (*Global Positioning System*).

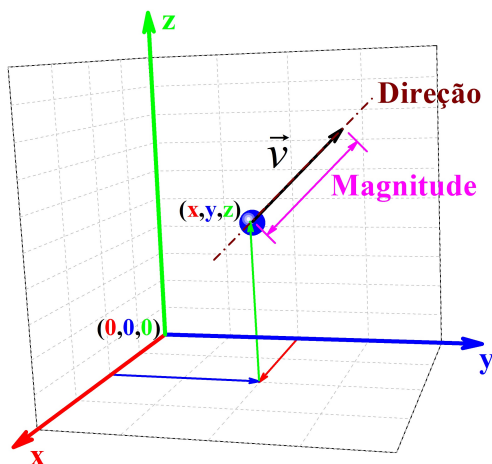


FIGURA 5.1: Magnitude e direção do vetor velocidade \vec{v} de um objeto localizado na posição (x, y, z) de um sistema de coordenadas cartesianas com relação à origem $(0, 0, 0)$.

Para entender melhor o significado físico da se-

gunda lei de Newton e se a mesma faz sentido vamos elaborar matematicamente uma lei de movimento baseada nas ideias de Aristóteles.

Nós vivemos em um mundo dominado pela fricção. Se tentarmos mover uma cadeira na sala de aula precisamos aplicar uma força sobre a mesma. Quanto maior a força aplicada maior será a velocidade da cadeira, mas se pararmos de empurrá-la ela cessa o movimento rapidamente. De acordo com Aristóteles, um objeto só pode se mover enquanto existir uma força resultante diferente de zero aplicada sobre ele. Naturalmente, a direção do movimento será a mesma da aplicação da força. Logo, a lei de movimento de Aristóteles pode ser escrita matematicamente como,

$$\vec{F} = m\vec{v}, \quad (5.2)$$

em que \vec{F} é a força total aplicada e, de acordo com Aristóteles, a resposta à aplicação desta força seria o vetor velocidade \vec{v} . Com um pouco de reflexão não é difícil concluir que o fator de proporcionalidade, dado por m , é a massa do objeto, pois quanto maior m menor é a velocidade do mesmo.

A lei expressa pela eq.(5.2) parece fazer muito sentido para a maioria dos estudantes, pois é o que vemos no caso da cadeira e em muitas outras situações do dia a dia. Por que então a lei de Newton, dada pela eq.(5.1), diz que a força é proporcional à aceleração do objeto e não à velocidade? Por que Aristóteles estava errado? Aristóteles, assim como a maioria de nós quando estamos iniciando nossos estudos sobre movimento, chegou a algumas conclusões erradas por não entender que o atrito, ou fricção, é uma força. A força total aplicada na cadeira é aquela necessária para superar a força de atrito para colocar a cadeira em movimento e não necessariamente para produzir o movimento da mesma. E quando a força de atrito é insignificante, o que acontece?

O engano de Aristóteles fica evidente nesta situação. Se colocarmos a cadeira sobre uma pista de gelo, a cadeira continua a se mover em linha reta mesmo após cessarmos a aplicação da força sobre a mesma. Isso está em contradição com a lei dada pela eq.(5.2), pois para $F = 0$ deveríamos ter $v = 0$. Note como a relação matemática pode nos auxiliar na descrição do fenômeno. Por outro lado, se tivermos $F = 0$ na lei de Newton,

eq.(5.1), a aceleração é igual a zero, o que significa que a velocidade do objeto não varia, mas o mesmo pode estar em movimento retilíneo uniforme se $v \neq 0$. Ou seja, para existir movimento não é necessário que exista uma força aplicada no objeto o tempo todo.

Mas como podemos prever o futuro do objeto em movimento através das leis de Aristóteles e de Newton?

Para facilitar os nossos cálculos vamos considerar que o “mundo” do objeto é composto por uma linha. Isso significa que estamos tratando o problema em uma única dimensão. Essa dimensão, ou linha, pode ser o eixo x , y ou z do nosso sistema de coordenadas. Vamos tratar o movimento no eixo x . Como nós não estamos considerando forças de atrito, podemos assumir que a cadeira ou o objeto em questão é uma partícula. A forma geométrica do objeto não importa nesta situação. Sendo a velocidade do objeto dada por $v = \Delta x / \Delta t$ e o tempo inicial $t_0 = 0$ podemos escrever a eq.(5.2) como,

$$F = m \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow x(t) = x_0 + \frac{F}{m}t, \quad (5.3)$$

em que x_0 é a posição da partícula no tempo inicial $t = t_0 = 0$. Essa equação nos diz que a posição da partícula

em um tempo qualquer, $x(t)$, ou seu estado futuro, pode ser obtida se conhecermos sua posição inicial x_0 , a força total aplicada F e sua massa m . Em outras palavras, qualquer que seja a posição da partícula no tempo t_0 , no próximo instante de tempo sua posição será deslocada de uma quantidade definida. No caso de uma força constante e positiva a partícula se moverá na direção positiva do eixo x por uma quantidade Ft/m . Note que, se a força aplicada for nula, teremos $x(t) = x_0$, e a partícula permanece em repouso em qualquer instante t posterior, como discutido anteriormente.

Para obtenção da equação de movimento de Newton vamos considerar, por simplicidade, que a partícula possui uma aceleração constante dada por $a = \Delta v / \Delta t = [v(t) - v_0] / t$. Isto significa que a partícula é acelerada a partir de sua velocidade inicial v_0 , em $t_0 = 0$, até a velocidade final v em um tempo total t , sem qualquer alteração de sua direção, veja Fig.5.2. Logo,

$$v(t) = v_0 + at. \quad (5.4)$$

O deslocamento da partícula é dado por,

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{v_0 + v(t)}{2} \Rightarrow x(t) = x_0 + \frac{[v_0 + v(t)]}{2}t, \quad (5.5)$$

pois $[v_0 + v(t)]/2$ é a velocidade média da partícula no tempo total t . Combinando as equações (5.4) e (5.5) para eliminar $v(t)$ obtemos:

$$x(t) = x_0 + \frac{(2v_0 + at)}{2}t \Rightarrow x(t) = x_0 + v_0t + \frac{a}{2}t^2. \quad (5.6)$$

Utilizando a segunda lei de Newton, eq.(5.1), em que $a = F/m$, obtemos finalmente a equação que nos permite prever o futuro da partícula segundo esta lei, ou seja,

$$x(t) = x_0 + v_0t + \frac{F}{2m}t^2. \quad (5.7)$$

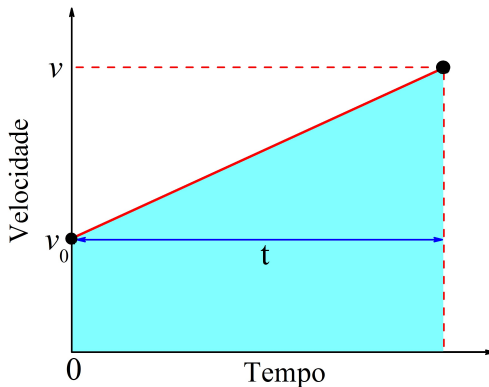


FIGURA 5.2: Gráfico da velocidade em função do tempo para uma partícula com aceleração constante a , dada pela inclinação da reta, ou seja, $a = [v(t) - v_0]/t$.

Note que se a força resultante for nula ($F = 0$) neste caso, teremos $x(t) = x_0 + v_0t$. Diferentemente da lei de movimento de Aristóteles, a eq.(5.7) nos diz que uma partícula se moverá em linha reta com velocidade constante $v_0 \neq 0$, mesmo quando $F = 0$. Este é o *movimento retilíneo uniforme* ou MRU. Este resultado nos conduz à primeira lei de Newton que diz que, um corpo permanecerá em seu estado de repouso ou movimento retilíneo uniforme quando a força resultante aplicada no mesmo for nula. Estes resultados estão em perfeito acordo com o que observamos na prática para corpos macroscópicos, conferindo às leis de Newton do movimento total credibilidade para estes casos. Note como a matemática nos auxiliou nestas conclusões. Além de obtermos a equação de movimento do sistema, nós demonstramos matematicamente o erro de Aristóteles e conseguimos abstrair a primeira lei de Newton do resultado obtido quando consideramos $F = 0$.

Capítulo 6

Equação geral e seus casos particulares

Em Física é muito comum obtermos equações que descrevem o comportamento de um sistema de forma geral, ou seja, considerando vários tipos de forças aplicadas e condições em que o mesmo é submetido. Diferentes situações particulares podem ser analisadas a partir destas equações gerais quando anulamos determinadas forças ou alteramos tais condições. A obtenção deste tipo de equação pode ser extremamente vantajosa para os alunos aprenderem a fazer análises, visualizar

situações e chegar a conclusões mais gerais. Estas dificilmente são concebidas a partir de situações particulares, nas quais são descritas apenas por equações específicas, pois raramente são feitas correlações entre resultados nestes casos. Isso faz com que o aluno tenha que memorizar uma infinidade de equações para a descrição do mesmo fenômeno tratado com diferentes condições, podendo tornar a Física em um obstáculo de memorização e aplicação de fórmulas. Se for mostrado aos alunos a possibilidade de obter uma equação geral para o problema e que, a partir desta é possível derivar as equações particulares para diferentes condições em que o fenômeno é considerado, é possível que os alunos comecem a analisar situações diversas por conta própria, apenas pela curiosidade de predizer o que pode acontecer com o sistema a partir do resultado matemático. Nós observamos isso durante a aplicação deste produto.

Para a situação que estudamos é interessante analisar primeiramente alguns casos particulares de movimento circular uniforme (MCU) sob o efeito ou não de forças de atrito para verificar e explorar todas estas vantagens. Nós sugerimos que a consideração do

problema geral, em que todas as situações são tratadas ao mesmo tempo para obtenção de uma única equação geral para o problema, seja feita posteriormente. Essa ordem foi escolhida porque verificamos que os alunos se mostram mais entusiasmados ao perceberem que a escolha de determinadas condições na equação geral fornecia casos particulares do problema que eles já conheciam. A percepção de tais condições pode trazer grande alegria e motivação aos estudantes. Todos os cálculos podem ser realizados de forma literal, porém, é aconselhável que o professor forneça valores numéricos para as grandezas para os alunos terem um noção melhor do resultado obtido.

Como primeiro caso particular vamos analisar a resultante centrípeta de um dos brinquedos mais emocionantes de alguns parques de diversão, o rotor. Este consiste de um dispositivo que gira em torno de seu próprio eixo acoplado a um grande cilindro vertical de raio R , veja ilustração na Fig.6.1(a). As pessoas ficam de pé apoiadas na parede interna deste cilindro. Quando colocado em rotação o piso é removido e as pessoas continuam apoiadas na parede sem escorregar, pois a força

peso da pessoa (mg) é equilibrada pela força de atrito estático. Assumindo que o cilindro gira com velocidade constante v e a lei de Coulomb para o atrito estático sendo dada por $f_{at} = \mu_e N$, em que μ_e é o coeficiente de atrito estático da superfície que compõe a parede interna do cilindro e N a reação normal da parede na pessoa, os alunos precisam determinar a velocidade do rotor em função de μ_e , g e R .

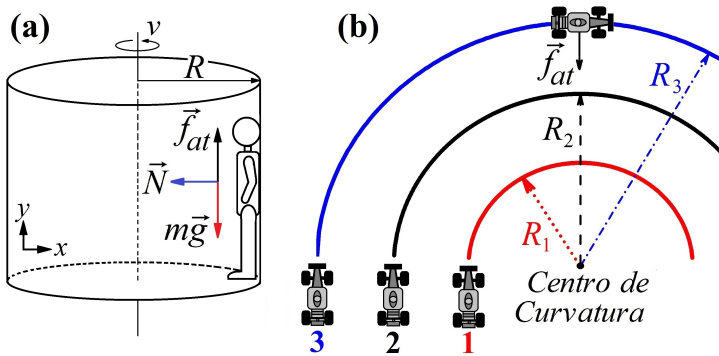


FIGURA 6.1: (a) Rotor de raio R girando em torno do seu próprio eixo com velocidade v constante. Uma pessoa apoiada na parede interna do cilindro vertical permanece apoiada mesmo depois que o piso é removido, pois sua força peso é equilibrada pela força de atrito da parede sobre a pessoa. (b) Ilustração de três veículos percorrendo três trajetórias circulares horizontais com raios de curvatura diferentes sob o efeito da força de atrito \vec{f}_{at} .

Os cálculos podem ser conduzidos de forma usual.

Considerando as forças resultantes nos eixos x e y temos,

$$\vec{F}_x = \vec{N} \quad (6.1)$$

$$\vec{F}_y = \vec{f}_{at} + m\vec{g} \quad (6.2)$$

A força resultante em x neste caso é a força centrípeta, de modo que $N = mv^2/R$. Da resultante em y obtemos que $\mu_e N = mg$. Isolando a força normal N em ambas expressões obtemos para a velocidade do rotor,

$$v = \sqrt{\frac{Rg}{\mu_e}}, \quad (6.3)$$

que é o resultado desejado. Este resultado mostra que quanto maior o raio do rotor, ou seja, mais distante a pessoa estiver do eixo de simetria do rotor, maior será sua velocidade.

O resultado da eq.(6.3) pode ficar ainda mais evidente se o professor utilizar analogias, como mostrar as diferentes velocidades em pontos localizados em diferentes posições sobre o raio de um disco rígido em rotação, ou o condicionamento de guia de 360° realizado com cavalos, em que o domador e o animal se comunicam através de uma guia para se movimentarem circularmente. Neste, o domador fica próximo do centro de

rotação caminhando lentamente enquanto que o cavalo, localizado na outra extremidade da guia a uma distância maior do centro de rotação, precisa se movimentar a uma velocidade bem maior para acompanhar o domador. Estas analogias podem ser muito úteis não só para o entendimento do resultado, mas também para motivar os alunos a observar com um olhar diferenciado fenômenos a volta deles e a possibilidade de descrever os mesmos matematicamente.

Para continuar com a análise de situações particulares vamos considerar o movimento de automóveis em duas situações distintas. Na primeira trataremos a ação da força de atrito no movimento dos veículos em curvas planas e horizontais. Em seguida aumentaremos um pouco a complexidade do sistema ao considerar que as curvas são inclinadas por um ângulo θ sem atrito e com atrito para comparações. Nestes casos, os alunos precisam determinar a velocidade máxima permitida para que a curva seja realizada com segurança em função de parâmetros como, o raio de curvatura R , a aceleração da gravidade g quando for o caso, e o coeficiente de atrito cinético entre os pneus e a pista μ , quando a força de

atrito for considerada.

Na Fig.6.1(b) mostramos três veículos percorrendo três trajetórias circulares horizontais com raios de curvatura diferentes sob o efeito da força de atrito \vec{f}_{at} . Quando um automóvel faz uma curva a uma determinada velocidade v , a força de atrito entre os pneus e a pista impede que o mesmo perca o traçado da curva. Porém, para que o automóvel possa realizar a curva com segurança existe uma velocidade limite ou velocidade máxima v_{max} . Esta é a razão de vermos placas de sinalização indicando a velocidade máxima de determinados trechos de uma rodovia. Esta velocidade pode ser obtida através da resultante centrípeta, que neste caso é igual à força de atrito, ou seja, $mv^2/R = \mu N$. Como o movimento do automóvel se dá em uma pista horizontal a reação normal é igual a força peso, $N = mg$. Com essas duas expressões podemos obter o valor de v_{max} que é dado por,

$$v_{max} = \sqrt{g\mu R}. \quad (6.4)$$

Note que v_{max} depende do raio da curvatura R . Por esta razão que utilizamos uma figura (Fig.6.1b) com

três veículos percorrendo três trajetórias circulares com raios diferentes. Os alunos podem notar que em uma curva mais aberta, maior R , o veículo poderá atingir velocidades maiores sem que perca o traçado da curva. Isso é amplamente observado em corridas de fórmula 1 ou de outras modalidades e até mesmo no dia a dia dos alunos. Outra pergunta que pode ser feita é, se os três veículos percorrerem as respectivas curvas à mesma velocidade, qual deles fará a curva com maior segurança? A partir da eq.(6.4) os alunos terão condições de analisar o problema de maneira adequada.

Outro caso particular muito interessante é considerar que a trajetória circular é agora inclinada por um ângulo θ , como na Fig.6.2. É conveniente tratar primeiramente o problema com ausência de qualquer força de atrito para mostrar para os alunos somente o efeito da inclinação da pista no valor da velocidade limite, responsável por manter o automóvel na trajetória horizontal. Neste caso é necessário considerar $f_{at}^{(1)}$ e $f_{at}^{(2)}$ iguais a zero na Fig.6.2. Para resolver o problema é preciso decompor o vetor força normal na direção da força centrípeta e na direção da força peso, de modo que

$N \sin(\theta) = mv^2/R$ e $N \cos(\theta) = mg$, respectivamente. Combinando as duas equações para eliminar N obtemos para a velocidade limite,

$$v = \sqrt{Rg \tan(\theta)}. \quad (6.5)$$

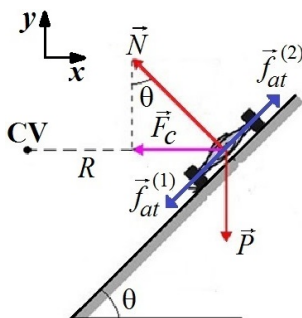


FIGURA 6.2: Ilustração de um carro em uma pista inclinada por um ângulo θ e todas as forças relevantes para a obtenção da equação geral para a velocidade limite do veículo, sendo \vec{F}_c a resultante centrípeta, \vec{N} a reação normal da pista no carro, \vec{P} sua força peso, R o raio de curvatura com relação ao centro de curvatura CV e duas situações diferentes consideradas para a força de atrito. Na situação 1 consideramos $f_{at}^{(1)}$ para dentro da curva e na situação 2 consideramos $f_{at}^{(2)}$ para fora da curva.

Neste ponto já é possível fazer algumas correlações entre os resultados obtidos até o momento. Se compararmos a eq.(6.5) com a eq.(6.4), obtida para a curva horizontal com atrito, tem-se que $\mu = \tan(\theta)$. Portanto,

a inclinação da pista faz o papel da força de atrito na trajetória horizontal para manter o veículo na curva. Este fenômeno é comumente explorado nos circuitos ovais e velódromos para possibilitar maior velocidade e maior aderência de carros e bicicletas nas pistas. É interessante notar também que se inclinarmos a pista de um ângulo próximo de 90° seria necessário velocidades muito grandes para garantir a aderência necessária para manter o carro na curva. Este resultado pode instigar os alunos ao desafio de conseguir tal feito. Quão grande deveria ser o valor dessa velocidade para um carro popular que tem uma massa em torno de 1300kg? Seria necessário alguma condição especial para o carro ou a pista para que uma corrida em uma pista inclinada de 90° com relação ao solo pudesse ser realizada na realidade? Uma dificuldade imediata que pode ser abstraída do nosso modelo para a engenharia dessa pista é que a força centrípeta deve necessariamente ser constante. Isso implicaria em construir uma pista perfeitamente circular, o que é muito difícil em termos práticos. Note como é possível conduzir o aluno a um mundo cheio de desafios quando um simples problema de física é tratado

matematicamente de forma adequada. A aliança entre estas disciplinas nos permite imaginar as possibilidades de se realizar uma corrida na parede. Grandes feitos tecnológicos podem surgir a partir de ideias e análises como esta.

A obtenção da equação geral do sistema pode ser feita a partir de duas situações em que a força de atrito deve ser considerada, para dentro da curva $\vec{f}_{at}^{(1)}$ e para fora da curva $\vec{f}_{at}^{(2)}$, como ilustrado na Fig.6.2. Note que se considerarmos $\theta = 0$ teremos apenas $\vec{f}_{at}^{(1)}$, que é a responsável por manter o carro na curva. No caso da pista inclinada, diversas possibilidades podem ser analisadas para o ângulo de inclinação θ , de $0 \leq \theta \leq \pi/2$, e também ângulos maiores que $\pi/2$. Por esta razão consideramos a força $\vec{f}_{at}^{(2)}$, pois à medida que aumentamos θ o carro poderá deslizar para baixo devido ao seu peso, como no caso de um bloco deslizando para baixo sob o efeito da gravidade em um plano inclinado. Diante dessa possibilidade pode-se abordar ainda a seguinte questão: Será que é possível obter matematicamente o valor de θ para o qual a força $\vec{f}_{at}^{(2)}$ começa a se tornar relevante em comparação com $\vec{f}_{at}^{(1)}$?

Como neste caso mais geral são tratadas diversas forças, os alunos usualmente ficam um pouco reticentes para iniciar os cálculos das velocidades limites para as duas situações. Uma maneira conveniente para fazer com que todos participem pelo menos da análise da equação geral é apresentar a expressão final da velocidade limite para cada situação e pedir para eles chegarem no resultado.

Considerando o mesmo coeficiente de atrito μ , ou seja, $f_{at}^{(1)} = f_{at}^{(2)} = \mu N$, é possível mostrar, utilizando o mesmo procedimento descrito anteriormente para os casos particulares, que:

Situação 1:

$$v_1 = \sqrt{Rg \left[\frac{\sin(\theta) + \mu \cos(\theta)}{\cos(\theta) - \mu \sin(\theta)} \right]}. \quad (6.6)$$

Situação 2:

$$v_2 = \sqrt{Rg \left[\frac{\sin(\theta) - \mu \cos(\theta)}{\cos(\theta) + \mu \sin(\theta)} \right]}. \quad (6.7)$$

Se compararmos as eqs.(6.6) e (6.7) a única diferença é o sinal de μ . Ao apresentar estas expressões é

provável que muitos alunos desistirão de obter tais resultados, geralmente pelo tamanho da equação. Muitos desistem antes mesmo de tentar. Como já dissemos, isso não impede que estes alunos também possam fazer a análise destas relações para diferentes condições.

Após a obtenção de v_1 e v_2 pelos alunos, inicie a análise dos resultados para alguns valores particulares do ângulo de inclinação θ . Se for feito o limite das eqs.(6.6) e (6.7) para θ tendendo a zero tem-se:

Situação 1:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} v_1 = \sqrt{Rg \left[\frac{\sin(0) + \mu \cos(0)}{\cos(0) - \mu \sin(0)} \right]} = \sqrt{Rg\mu}. \quad (6.8)$$

Situação 2:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} v_2 = \sqrt{Rg \left[\frac{\sin(0) - \mu \cos(0)}{\cos(0) + \mu \sin(0)} \right]} = \sqrt{-Rg\mu}. \quad (6.9)$$

Na situação 1 foi reproduzido o resultado da pista horizontal dado pela eq.(6.4). Neste caso não faz sentido considerarmos uma força de atrito para fora da curva, pois o que mantém o veículo na curva é a força centrípeta dada pela força de atrito. Por esta razão obtém-se uma raiz quadrada negativa para a situação 2 em que $f_{at}^{(2)} \neq$

0.

Considerando agora os limites de v_1 e v_2 para $\theta \rightarrow \pi/2$ obtemos,

$$v_1 = \sqrt{-\frac{Rg}{\mu}}, \quad (6.10)$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{Rg}{\mu}}. \quad (6.11)$$

Novamente, reproduzimos um resultado conhecido em que v_2 é precisamente a velocidade limite para o rotor dado pela eq.(6.3). A raiz negativa obtida em v_1 também fornece um resultado importante, porque os alunos percebem rapidamente que isso seria equivalente à velocidade limite para o carro não ascender a pista verticalmente, o que acaba sendo um absurdo uma vez que o veículo tende a cair verticalmente sob o efeito da gravidade.

Outra condição pode ser feita com relação à força de atrito. Se fizermos $\mu = 0$ obtemos:

$$v_i = \sqrt{Rg \tan(\theta)}, \quad (6.12)$$

para ambas situações, $i = 1, 2$. Este resultado é o mesmo obtido na eq.(6.5) para a pista inclinada sem atrito.

Nesta etapa o professor pode provocar os alunos ao considerar as condições $\theta = 0$ e $\mu = 0$. O resultado para ambas situações é $v = 0$. Isso pode gerar uma infinidade de discussões. Alguns alunos irão criticar o modelo com afirmações sobre a impossibilidade do veículo realizar uma curva nestas condições, uma vez que o mesmo está parado. Com um pouco de discussão e reflexão os alunos perceberão que se tanto o atrito quanto o ângulo de inclinação forem nulos, a única forma do carro não sair da curva é ficar parado, por isso que o modelo matemático fornece uma velocidade nula nestas condições. Vale ressaltar que está sendo calculada a velocidade limite para o carro se manter no traçado da curva.

O leitor pode estar se perguntando, se o propósito aqui é obter uma equação geral, por que então não tratamos $f_{at}^{(1)}$ e $f_{at}^{(2)}$ na mesma equação, considerando uma única situação em vez de duas como foi feito? Essa separação foi feita para facilitar a visualização dos resultados quando as condições particulares são utilizadas nas situações 1 e 2. Podemos tratar as duas situações em uma só sem maiores problemas.

Considerando $f_{at}^{(i)} = \mu_i N$, para $i = 1, 2$, pode-se demonstrar que a velocidade limite neste caso é dada por,

$$v = \sqrt{Rg \left[\frac{\sin(\theta) + (\mu_1 - \mu_2) \cos(\theta)}{\cos(\theta) - (\mu_1 - \mu_2) \sin(\theta)} \right]}. \quad (6.13)$$

Este resultado é praticamente o mesmo obtido para as situações 1 e 2, eqs.(6.6) e (6.7). Isso fica mais evidente se substituirmos $(\mu_1 - \mu_2)$ por um coeficiente de atrito efetivo μ na situação 1 e $-\mu$ na situação 2. É interessante notar ainda na eq.(6.13) que se tivermos $\mu_1 = \mu_2$ obtemos a velocidade limite para a pista inclinada sem atrito, $\mu = 0$, dada pela eq.(6.5). Ou seja, como as forças de atrito são iguais elas se anulam e o efeito é como se o atrito não existisse.

Note a infinidade de discussões que podem ser conduzidas a partir da obtenção de uma equação geral para um problema de física. Como os alunos já conheciam as situações particulares, a análise da equação geral a partir de determinadas condições pode se tornar um exercício motivador para eles. Todo o raciocínio apresentado nesta seção está resumido na tabela 6.1 para as diferentes condições consideradas.

TABELA 6.1: Equações específicas reproduzidas a partir de condições particulares para alguns parâmetros do sistema, como o ângulo de inclinação θ e o coeficiente de atrito μ , inseridas nas equações gerais (6.6) e (6.7) para as velocidades limite v_1 e v_2 , respectivamente, de um veículo em movimento numa pista inclinada.

<i>Geral</i>	<i>Condição</i>	<i>Específica</i>	<i>Fenômeno Físico</i>
$v_1 = \sqrt{Rg \left[\frac{\sin(\theta) + \mu \cos(\theta)}{\cos(\theta) - \mu \sin(\theta)} \right]}$	$\theta = 0$	$\sqrt{Rg\mu}$	Pista horizontal com atrito eq.(6.4)
	$\theta = \frac{\pi}{2}$	$\sqrt{-\frac{Rg}{\mu}}$	Não existe v_1
	$\mu = 0$	$\sqrt{Rg \tan(\theta)}$	Pista inclinada sem atrito eq.(6.5)
$v_2 = \sqrt{Rg \left[\frac{\sin(\theta) - \mu \cos(\theta)}{\cos(\theta) + \mu \sin(\theta)} \right]}$	$\theta = 0$	$\sqrt{-Rg\mu}$	Não existe v_2
	$\theta = \frac{\pi}{2}$	$\sqrt{\frac{Rg}{\mu}}$	Rotor eq.(6.3)
	$\mu = 0$	$\sqrt{Rg \tan(\theta)}$	Pista inclinada sem atrito eq.(6.5)

Para responder a pergunta que fizemos anteriormente, sobre o valor do ângulo de inclinação θ da pista em que a força $\vec{f}_{at}^{(2)}$ começa a se tornar relevante em comparação com $\vec{f}_{at}^{(1)}$, é instrutivo a utilização dos gráficos de v_1 e v_2 em função do ângulo θ . Com o gráfico é possível analisar todos os ângulos possíveis para a velocidade limite em qualquer intervalo desejado.

Na Fig.6.3 representamos as velocidades v_1 (linha sólida vermelha) e v_2 (linha pontilhada-tracejada azul) em função do ângulo de inclinação da pista θ para $g = 9,81m/s^2$, $R = 10m$ e $\mu = 1$ no intervalo de $0 \leq \theta \leq 3\pi/2$ ou equivalentemente de $0 \leq \theta \leq 135^\circ$. Utilizamos um passo de $\pi/4$ (45°) no eixo θ . Ao observarem o gráfico a maioria dos alunos concordam que para $\theta = \pi/4$, ou 45° , a força de atrito $f_{at}^{(2)}$ começa a se tornar relevante e precisa ser considerada no problema. Neste ângulo é possível observar também, através de v_1 , que se $f_{at}^{(2)}$ não fosse considerada, seria necessário uma velocidade v_1 muito grande para o veículo se manter na pista. Com a utilização do gráfico o professor pode fazer variações da mesma pergunta como, para quais intervalos de θ devemos considerar $f_{at}^{(1)}$ e $f_{at}^{(2)}$?

Uma questão muito interessante que pode ser levantada junto a turma é a possibilidade de existir uma velocidade limite v_2 para ângulos maiores que $\pi/2$, correspondente a área hachurada do gráfico da Fig.6.3. Como no exemplo da contração de Lorentz na relatividade, apresentado no capítulo 3, observamos um resultado matematicamente possível mas que não tem possibilidade física nas condições consideradas, pois o carro irá cair verticalmente para $\theta > \pi/2$. Portanto, chamamos a atenção mais uma vez sobre as vantagens de se trabalhar as disciplinas de física e matemática de maneira indissociável.

No capítulo 8 falaremos um pouco mais sobre as vantagens de se utilizar gráficos para auxiliar na análise de um problema.

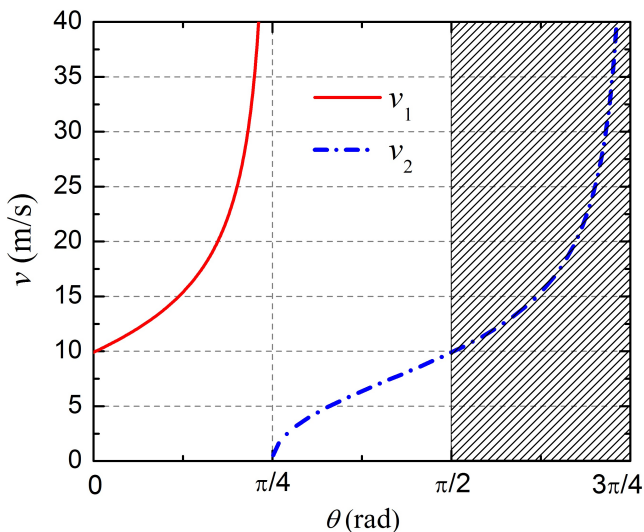


FIGURA 6.3: Gráficos das velocidades do carro nas situações 1 (v_1) e 2 (v_2), ilustradas na Fig.6.2, em função do ângulo de inclinação da pista θ . Estes são obtidos das eqs.(6.6) e (6.7) em que foram consideradas as forças de atrito $f_{at}^{(1)}$ e $f_{at}^{(2)}$, respectivamente, utilizando os parâmetros $g = 9,81m/s^2$, $R = 10m$ e $\mu = 1$. A área hachurada é para destacar ângulos maiores que $\pi/2$ para a velocidade limite v_2 .

Capítulo 7

Força variável:

Movimento Harmônico

Simple

Nas situações descritas na seção anterior foi possível obter as leis de movimento do sistema e situações limite utilizando uma matemática simples e adequada para o ensino médio. E para o caso de sistemas em que a força aplicada não é nem constante e nem nula, seria possível proceder da mesma maneira para obtenção das leis de movimento? Se considerarmos o caso de um

oscilador harmônico em uma dimensão, como o sistema massa-mola ilustrado na Fig.7.1, em que temos uma força variável dada pela lei de Hooke $F(x) = -kx$, como podemos convencer os estudantes de que a lei de movimento deste sistema é dada por,

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi), \quad (7.1)$$

em que A é a amplitude do movimento, ω a frequência angular de oscilação e ϕ a fase inicial do movimento? Este movimento é denominado Movimento Harmônico Simples (MHS), significando que a posição x da partícula é uma função senoidal do tempo.

De fato não é nada trivial dizer para um estudante que um movimento pode ser descrito por uma função senoidal. Ainda mais se este tipo de função não for familiar aos alunos. À primeira vista, pode parecer muito complicado obter a eq.(7.1) através de uma matemática acessível para os alunos do ensino médio. A forma mais direta seria utilizar técnicas de cálculo diferencial e integral e números complexos para resolver a equação diferencial $F = -kx$, ou seja, a princípio seria completamente inviável para alunos do ensino médio.

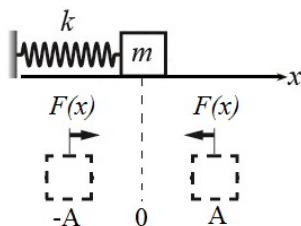


FIGURA 7.1: Sistema massa-mola descrito pela lei de Hooke $F(x) = -kx$, mostrando que quando a massa m se desloca de sua posição de equilíbrio estável ($x = 0$), a força restauradora $F(x)$ fornecida pela mola de constante elástica k faz com que a mesma retorne a $x = 0$. É por isso que esta força é chamada de restauradora, pois ela age no sentido de restaurar a posição de equilíbrio estável do sistema. A contante A ou $-A$ descreve a amplitude do movimento.

Vamos demonstrar agora como a matemática pode auxiliar o ensino de física mesmo nesta situação. Utilizando conceitos familiares para os alunos do ensino médio, como geometria, movimento retilíneo e circular uniformes e projeção de vetores, mostraremos como obter a posição do oscilador harmônico no tempo, dada pela eq.(7.1), sua velocidade e aceleração.

Para isso, uma das alternativas seria visualizar o movimento do oscilador harmônico como uma projeção de outro tipo de movimento que conhecemos e consegui-

mos equacionar facilmente. Se considerarmos um objeto em movimento circular uniforme (MCU) em uma trajetória circular de raio R , como ilustrado na Fig.7.2(a), nota-se que a sombra ou a projeção do objeto no eixo x realiza o mesmo movimento que uma massa presa a uma mola. Ou seja, este realiza um movimento de vai e vem periódico com um deslocamento máximo, ou amplitude, dado por R . Antes da obtenção da lei de movimento da projeção da partícula, que executa um MHS, vamos obter a equação de movimento da partícula na trajetória circular.

Vamos considerar que a trajetória circular é dada por s . Se a partícula completar uma volta no círculo, ela terá percorrido a distância do comprimento da circunferência do mesmo, ou seja, $s = 2\pi R$. O fator 2π é o ângulo total, dado por 360° , contido no círculo de raio R . Naturalmente, se a partícula percorrer apenas um arco da trajetória circular teremos $s = \theta R$. Note que para o círculo completo $\theta = 2\pi$. Para obter a equação de movimento deste sistema vamos recorrer ao que nós já sabemos sobre o movimento retilíneo uniforme (MRU). Você poderia perguntar, mas o que estes movimentos

têm em comum se um é circular e o outro é retilíneo?

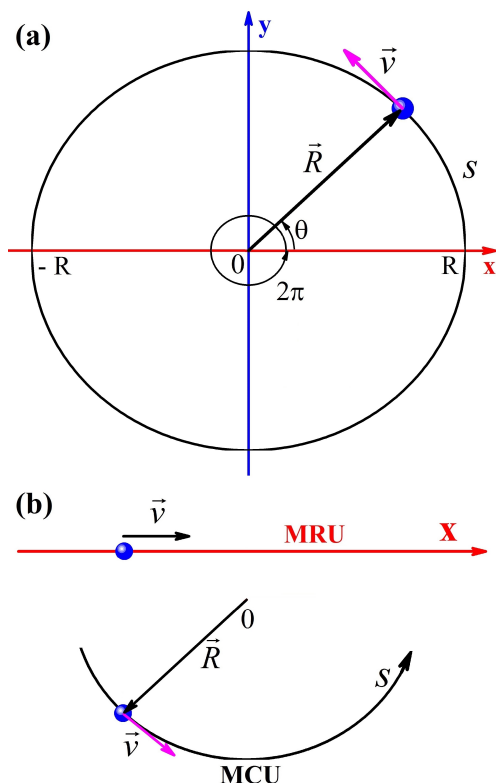


FIGURA 7.2: (a) Partícula em movimento circular uniforme com velocidade \vec{v} , mostrando a trajetória circular s de raio R e ângulo θ . (b) Se curvamos a trajetória retilínea dada pelo eixo x no MRU obtemos a trajetória circular s do MCU. Em ambos os casos temos um grau de liberdade.

Na verdade estes dois movimentos tem muito em comum e podem ser descritos basicamente pela mesma

equação. Vamos ver como isso pode ocorrer. Ambos os movimentos são uniformes. Isso significa que a magnitude da velocidade de ambos os sistemas é constante. Observe que falamos sobre a magnitude da velocidade, pois como já discutido, a velocidade é um vetor e no caso circular ela muda sua direção o tempo todo porque existe uma força centrípeta mantendo a partícula em uma trajetória circular. Já no caso retilíneo tanto a magnitude quanto a direção da velocidade são constantes. Mas como podemos aproveitar a equação do movimento retilíneo uniforme para descrever o movimento circular uniforme?

Para isso precisamos recorrer ao que chamamos na física de grau de liberdade. Isto se refere à liberdade de movimento de um sistema físico, ou seja, é a variável de movimento do sistema. No caso do MRU em uma dimensão, vimos que o “mundo” da partícula é uma linha reta dada pelo eixo x . Logo, a partícula só pode se mover para frente e para trás em x . Portanto, este sistema possui um único grau de liberdade que é dado por x . No caso do MCU, quantos graus de liberdade nós temos? A maioria dos alunos respondem 2, porque

o movimento se dá em um plano, no nosso caso xy . Este é um exemplo de sistema bidimensional. Geralmente os alunos confundem o número de dimensões com o número de graus de liberdade do sistema. Este exemplo é ótimo para mostrar a diferença entre os mesmos. Observe que a partícula, apesar de estar se movendo em um plano, ainda está confinada a se mover em uma linha, dada pela trajetória s , pois o raio da trajetória circular não varia. Ou seja, apesar deste ser descrito em duas dimensões, continuamos com um sistema de um grau de liberdade apenas. E que grau de liberdade é esse? Este pode ser descrito tanto por s quanto por θ , pois ambos estão relacionados por $s = \theta R$. É interessante notar que se a trajetória retilínea dada pelo eixo x no MRU for curvada, teremos automaticamente a trajetória s do MCU, como mostra a Fig.7.2(b).

Dessa forma podemos utilizar a equação do MRU dada por $s(t) = s_0 + vt$, obtida da eq.(5.7) quando $F = 0$ e trocando x por s , para obtenção da equação do MCU. Utilizando a relação $s = \theta R$ e como R não varia com o tempo obtemos:

$$\theta(t) = \frac{s(t)}{R} \implies \theta(t) = \frac{s_0}{R} + \frac{v}{R}t. \quad (7.2)$$

Note que a expressão acima nos permite descrever como o ângulo θ varia no tempo. Ainda utilizando a relação entre s e θ , podemos identificar s_0/R como a posição angular inicial θ_0 da partícula na trajetória circular. E a razão v/R o que é? Se fizermos a variação de s no tempo e lembrando que a velocidade linear da partícula é dada por $\Delta s/\Delta t$ e o raio R da trajetória circular é constante tem-se,

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta(R\theta)}{\Delta t} = R \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \implies v = R\omega. \quad (7.3)$$

O parâmetro $\omega = \Delta\theta/\Delta t$ é a velocidade angular da partícula a qual é dada em rad/s , ou seja, ela nos fornece a taxa com que a posição angular θ da partícula varia no tempo. Neste caso ela é constante, porque estamos trabalhando com movimento uniforme. Logo, a equação que descreve o movimento da partícula na trajetória circular é dada por:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t. \quad (7.4)$$

Note a semelhança da eq.(7.4) para o MCU com a equação do MRU. O que nós temos é uma conversão de variáveis dinâmicas lineares para variáveis dinâmicas angulares,

ou seja, $s \rightarrow \theta$ e $v \rightarrow \omega$. O mesmo procedimento pode ser realizado para obtenção da aceleração angular.

Agora que sabemos a equação que rege o movimento da partícula na trajetória circular, podemos analisar sua projeção para obtermos a equação de movimento do oscilador harmônico. Projetando a posição da partícula no eixo x , dada pelo vetor \vec{R} , veja Fig.7.3, temos que

$$\vec{x}(t) = |\vec{R}| \cos [\theta(t)] (\hat{i}). \quad (7.5)$$

Note que apareceu uma novidade na expressão acima, dada pelo *versor* \hat{i} . Um versor é um vetor de magnitude unitária que indica a direção e o sentido do vetor que está sendo tratado. No nosso caso, o versor \hat{i} indica a direção e o sentido de \vec{x} . Quando um aluno pergunta para o outro onde fica a cantina da escola por exemplo, o outro aluno apenas aponta o dedo em direção ao local desejado. Este aluno está fornecendo o versor do deslocamento entre eles e a cantina, pois ele está indicando apenas a direção e o sentido que o colega que perguntou precisa seguir, e não a distância. Portanto, o versor \hat{i} está indicando que a projeção do vetor \vec{R} no eixo x , a

qual descrevemos por \vec{x} , aponta para o sentido positivo de x , como mostrado na Fig.7.3.

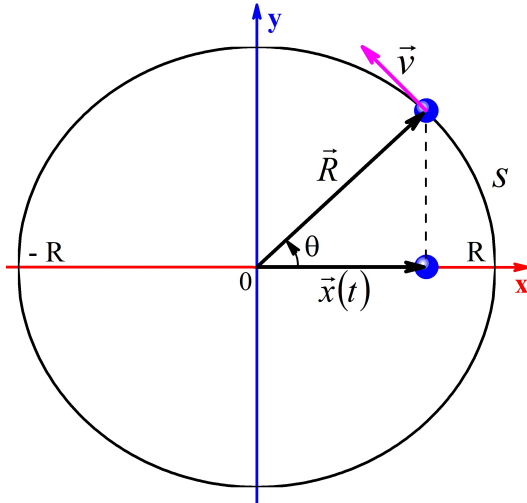


FIGURA 7.3: Partícula em movimento circular uniforme com velocidade \vec{v} , mostrando a projeção do vetor \vec{R} no eixo x , dada por $\vec{x}(t) = |\vec{R}| \cos[\theta(t)] (\hat{i})$, para obtenção da equação de movimento do oscilador harmônico.

Substituindo $\theta(t)$ dado pela eq.(7.4) em (7.5), obtemos:

$$x(t) = R \cos(\omega t + \theta_0), \quad (7.6)$$

em que utilizamos a notação $|\vec{R}| = R$ para o valor absoluto, ou a magnitude, de \vec{R} . Se trocarmos as letras que descrevem a amplitude R do movimento e a fase

inicial θ_0 por A e ϕ , respectivamente, obtemos a mesma expressão dada pela eq.(7.1), a qual descreve a equação de movimento do oscilador harmônico. Os alunos ou você mesmo pode estar se perguntando por que trocar as letras? Esta é uma boa oportunidade para introduzir o conceito de variáveis mudas aos alunos. Não importa a letra, o importante é o seu significado físico. Consideramos A e ϕ ao final do procedimento porque esta é a notação comumente utilizada nos livros didáticos.

Vimos então que não foi preciso resolvermos formalmente a equação diferencial dada por $F(x) = -kx$ através de números complexos ou qualquer outro método. Utilizamos apenas conceitos matemáticos básicos e acessíveis a qualquer aluno do ensino médio, mostrando que não é necessário nos limitarmos ao tratamento de movimentos simples, como o MRU, neste nível de ensino, com a justificativa da limitação matemática dos alunos para o tratamento de sistemas mais complexos.

Vamos utilizar o mesmo procedimento para obtenção da velocidade $v(t)$ e da aceleração $a(t)$ do oscilador harmônico. Para isso precisamos determinar a projeção de ambos no eixo x , pois estamos analisando o

movimento da projeção da partícula neste eixo.

No caso da velocidade é necessário ver como o ângulo θ está disposto com relação ao vetor \vec{v} , pois este não começa na origem do nosso sistema de coordenadas, como o vetor \vec{R} . Pela Fig.7.4(a) podemos tirar a seguinte relação entre os ângulos α , β e θ ,

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\alpha + \theta = 90^\circ.$$

Note que utilizamos o fato do vetor velocidade \vec{v} ser perpendicular ao vetor \vec{R} . Subtraindo as equações acima obtemos $\beta = \theta$. Agora podemos decompor o vetor velocidade nas suas componentes paralelas aos eixos coordenados, ou seja, \vec{v}_x e \vec{v}_y como mostrado na Fig.7.4(b).

A componente de interesse para nós é \vec{v}_x , de modo que,

$$\vec{v}_x = |\vec{v}| \sin(\theta)(-\hat{i}) \Rightarrow v_x = -\omega R \sin(\theta), \quad (7.7)$$

onde nós utilizamos a relação $v = \omega R$ obtida em (7.3).

Note que neste caso o vetor \vec{v}_x é descrito pelo versor $-\hat{i}$, pois \vec{v}_x aponta na direção negativa do eixo x . Como nós já obtemos como o ângulo θ varia no tempo, eq.(7.4),

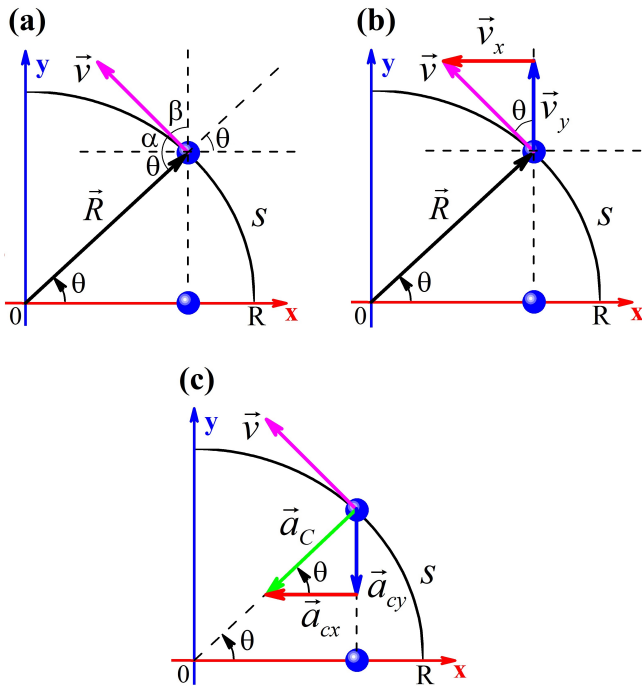


FIGURA 7.4: (a) Disposição do ângulo θ em torno do vetor velocidade \vec{v} . (b) Decomposição de \vec{v} em suas componentes \vec{v}_x e \vec{v}_y . (c) Decomposição do vetor aceleração centrípeta \vec{a}_C em suas componentes \vec{a}_{cx} e \vec{a}_{cy} .

podemos concluir de forma direta que,

$$v_x(t) = -\omega R \sin(\omega t + \theta_0), \quad (7.8)$$

Para obtenção da aceleração do oscilador harmônico precisamos considerar a resultante centrípeta na direção radial dada por $F = ma_C$, em que $a_C = v^2/R$ é a

aceleração centrípeta da partícula. Esta força é a responsável por manter a partícula em movimento circular uniforme. Ela provoca apenas uma mudança na direção do vetor velocidade.

Como o vetor aceleração centrípeta (\vec{a}_C) está na direção do raio da trajetória circular, sua projeção no eixo x pode ser visualizada facilmente, veja Fig.7.4(c), de modo que,

$$\vec{a}_{cx} = |\vec{a}_C| \cos(\theta)(-\hat{i}) \Rightarrow a_{cx} = -\frac{v^2}{R} \cos(\theta). \quad (7.9)$$

Utilizando novamente a relação $v = \omega R$ e a expressão (7.4) para $\theta(t)$ obtemos finalmente,

$$a_{cx}(t) = -\omega^2 R \cos(\omega t + \theta_0). \quad (7.10)$$

Note que, assim como para a componente em x da velocidade, a componente \vec{a}_{cx} da aceleração também aponta na direção negativa do eixo x . Se trocarmos a amplitude R e a fase inicial θ_0 por A e ϕ , respectivamente, e omitirmos os subíndices da velocidade e da aceleração podemos escrever as equações de movimento do oscilador, o qual executa um movimento harmônico

simples, como:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi), \quad (7.11a)$$

$$v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \quad (7.11b)$$

$$a(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi). \quad (7.11c)$$

Portanto, fica demonstrado que é possível obter as equações de movimento de sistemas mais complexos, como o do oscilador harmônico o qual está sujeito a uma força variável, utilizando apenas a matemática acessível para os alunos do ensino médio. No próximo capítulo mostraremos como o movimento harmônico simples pode ser analisado através dos gráficos das equações (7.11).

Capítulo 8

Movimento Harmônico Simples em Gráficos

A análise de um fenômeno físico através de gráficos de funções que relacionam suas propriedades pode ser muito vantajosa para os estudantes em qualquer nível de ensino. Ao ver como o sistema se comporta quando algum parâmetro interno ou externo do mesmo varia, pode permitir ao aluno fazer previsões ao considerar limites assintóticos ou mesmo em intervalos de interesse e discutir a validade de modelos através de dados experimentais. Novamente, a matemática desempenha o seu

papel fundamental para o ensino de física.

A descrição do movimento do oscilador harmônico através de gráficos é essencial para que os estudantes entendam melhor o comportamento de uma função senoidal. Estas funções descrevem muito bem movimentos oscilatórios, pois são funções periódicas definidas em uma imagem simétrica que fornece a amplitude, ou o valor máximo, de uma propriedade física.

Você pode estar se perguntando, por que nós estamos insistindo tanto no tema oscilador harmônico? Nós iniciamos este tema para mostrar que é possível obter as equações de movimento de um sistema com força variável, mesmo com as limitações matemáticas de um aluno do ensino médio. Por que então não fornecer outros exemplos para enriquecer ainda mais o ensino de física neste nível? Na verdade estudar tal sistema é fornecer aos alunos uma infinidade de exemplos de sistemas presentes na natureza e de convívio do dia a dia deles. Apesar da simplicidade da lei de Hooke, em que a força restauradora aplicada no sistema é proporcional ao negativo do seu deslocamento, $F(x) = -kx$, esta pode descrever com boa aproximação

um sistema massa-mola real ou um pêndulo executando pequenas oscilações, um oscilador torsional, alguns circuitos elétricos, vibrações sonoras, vibrações moleculares, alguns fenômenos quânticos e incontáveis outros sistemas presentes em diversas áreas do conhecimento. O entendimento de oscilações é requerido para o entendimento de ondas. Ondas harmônicas são produzidas por oscilações harmônicas. Por estas e outras razões que o oscilador harmônico é tão importante na física, justificando assim nossa insistência no tema.

Antes de esboçarmos os gráficos que descrevem o movimento do oscilador harmônico é importante entendermos algumas propriedades do movimento oscilatório. Este é periódico e portanto possui uma frequência, ou número de oscilações que são completadas em cada segundo. O símbolo para a frequência que medimos no laboratório ou quando sintonizamos uma estação de rádio geralmente é dado por f e sua unidade no Sistema Internacional de Unidades (SI) é o hertz, abreviado como Hz. Uma oscilação ou ciclo por segundo equivale a $1 \text{ Hz} = 1\text{s}^{-1}$.

O período T do movimento, que é o tempo ne-

cessário para completar uma oscilação, está relacionado com a frequência por $T = 1/f$, ou seja, é o inverso da frequência sendo dado em segundos (s). Qualquer movimento que se repita em intervalos regulares é chamado movimento periódico ou movimento harmônico simples (MHS). É interessante notar que a frequência que aparece nas expressões para o deslocamento, a velocidade e a aceleração do oscilador, obtidos no capítulo anterior, é a frequência angular ω e não f . É possível relacionar o período T e a frequência f com a frequência angular ω ?

Para isso vamos utilizar a eq.(7.11a), que fornece a posição do oscilador $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$. A função cosseno, assim como o seno, possui período de 2π , ou seja, $\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta)$. Isso significa que devemos ter $x(t+T) = x(t)$ ao considerarmos o período temporal $t = T$. Assumindo uma fase inicial nula $\phi = 0$, por simplicidade, temos que

$$\begin{aligned}x(t+T) &= x(t), \\A \cos(\omega t + \omega T) &= A \cos(\omega t) \Rightarrow \omega T = 2\pi, \\ \therefore T &= \frac{2\pi}{\omega}.\end{aligned}\tag{8.1}$$

Como $T = 1/f$ podemos obter de forma direta que $f = \omega/2\pi$. Com estes resultados fica bem mais fácil esboçarmos os gráficos que descrevem o MHS.

Se considerarmos múltiplos do período T para o tempo, no nosso caso $T/4$, e substituirmos nas eqs.(7.11) podemos construir tabelas como a tabela 8.1. Para isso nós consideramos a fase inicial $\phi = 0$, por simplicidade, e a expressão do período dada por (8.1). A importância de utilizarmos esta expressão está no fato de podermos eliminar ω nos cálculos. Dessa forma não é necessário atribuímos valores numéricos para ω e T . Veja o exemplo para $t = T/4$:

$$\begin{aligned}x\left(\frac{T}{4}\right) &= A \cos\left(\omega \frac{2\pi}{4\omega}\right) = A \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \\v\left(\frac{T}{4}\right) &= -\omega A \sin\left(\omega \frac{2\pi}{4\omega}\right) = -\omega A \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\omega A, \\a\left(\frac{T}{4}\right) &= -\omega^2 A \cos\left(\omega \frac{2\pi}{4\omega}\right) = -\omega^2 x\left(\frac{T}{4}\right) = 0.\end{aligned}$$

Na Fig.8.1 nós plotamos os gráficos da posição $x(t)$, da velocidade $v(t)$ e da aceleração $a(t)$ em função do tempo t para dois períodos de oscilação utilizando as mesmas condições da tabela 8.1.

TABELA 8.1: Valores da posição $x(t)$, da velocidade $v(t)$ e da aceleração $a(t)$ do oscilador harmônico para $\phi = 0$ e considerando múltiplos de $T/4$ para o tempo t .

t	$x(t)$	$v(t)$	$a(t)$
0	A	0	$-\omega^2 A$
$T/4$	0	$-\omega A$	0
$T/2$	$-A$	0	$\omega^2 A$
$3T/4$	0	ωA	0
T	A	0	$-\omega^2 A$

Como a imagem das funções seno e cosseno é o intervalo fechado $[-1, 1]$, as amplitudes destas propriedades ficam caracterizadas pelos parâmetros que multiplicam essas funções, sendo dadas por A , ωA e $\omega^2 A$ para a posição, a velocidade e a aceleração, respectivamente. A partir destes gráficos várias discussões podem ser conduzidas com os alunos com relação ao papel dos parâmetros A , ω e ϕ nas eqs.(7.11). Os gráficos são essenciais para entender o significado físico destes parâmetros, pois é visível o aumento ou diminuição da amplitude A no eixo x , o aumento ou diminuição das oscilações em um período aumentando-se ou diminuindo-se ω e o desloca-

mento dos gráficos pela atribuição de valores para a fase inicial ϕ .

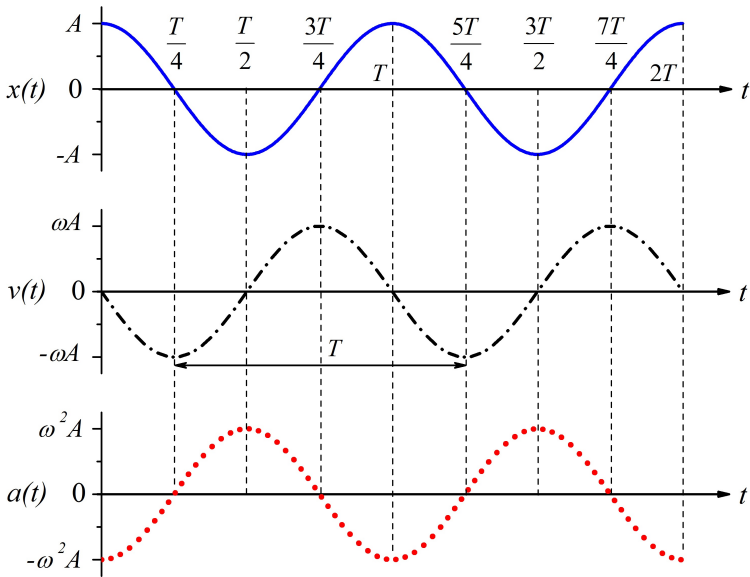


FIGURA 8.1: Gráficos da posição $x(t)$, da velocidade $v(t)$ e da aceleração $a(t)$ como funções do tempo t , de uma partícula realizando um movimento harmônico simples para dois períodos de oscilação. No eixo do tempo são exibidos múltiplos de um quarto do período $T = 2\pi/\omega$. Note que as amplitudes ou valores máximos da posição, da velocidade e da aceleração, são dados, respectivamente, por A , ωA e $\omega^2 A$.

Se considerarmos o sistema composto por uma massa presa a uma mola de constante elástica k os gráficos também podem ser úteis na determinação da frequência

de oscilação deste sistema. Formalmente esta frequência é obtida quando substituimos a eq.(7.11a) na equação diferencial do sistema massa-mola, de modo que,

$$\begin{aligned}
 ma(t) &= -kx(t), \\
 m \frac{d^2x(t)}{dt^2} &= -kx(t), \\
 \frac{d^2 [A \cos(\omega t + \phi)]}{dt^2} &= -\frac{k}{m} A \cos(\omega t + \phi), \\
 -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) &= -\frac{k}{m} A \cos(\omega t + \phi), \\
 \therefore \omega &= \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{8.2}
 \end{aligned}$$

A maioria dos alunos do ensino médio não conseguiriam obter esta expressão pela substituição de $x(t)$ na equação diferencial do sistema. Mas pelas eqs.(7.11) e pelos gráficos da Fig.8.1 o aluno pode perceber facilmente que $a(t) = -\omega^2 x(t)$. Substituindo esta expressão na segunda lei de Newton obtemos,

$$\begin{aligned}
 ma(t) &= -kx(t), \\
 -\omega^2 x(t) &= -\frac{k}{m} x(t), \\
 \omega &= \sqrt{\frac{k}{m}}
 \end{aligned}$$

e portanto, o aluno poderá obter a mesma expressão (8.2) sem a necessidade de derivar qualquer equação.

Os gráficos podem ser também muito úteis para o entendimento do fenômeno se o mesmo for esboçado junto com um diagrama do sistema físico. À esquerda da Fig.8.2 é mostrado a projeção da partícula, executando movimento circular uniforme, no eixo horizontal x . Logo abaixo do círculo projetamos as mesmas posições da partícula evoluindo no tempo para um período de oscilação. O tempo é representado por um eixo vertical apontando para baixo. Note que a forma senoidal do movimento pode ser literalmente desenhada pelo próprio sistema à medida que o mesmo evolui no tempo. Se para você isso é de fácil compreensão é porque você entende o resultado matemático dado por $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$. Infelizmente, para a maioria dos alunos não é, porque estes não conseguem relacionar a matemática obtida para a descrição do sistema físico com o fenômeno em estudo. Se eles conseguirem estabelecer essa ponte, fica evidente que o movimento da projeção da partícula é limitado pelo raio da circunferência, por exemplo, ou seja, que a amplitude do movimento em x é dada por R . Nós utilizamos a projeção no eixo x do movimento circular da partícula para tornar a obtenção das equações do

MHS mais viável, em termos matemáticos, para o aluno do ensino médio.

À direita da Fig.8.2 mostramos que um sistema massa-mola executa exatamente o mesmo movimento da projeção da partícula em x , bastando mudar o parâmetro que descreve a amplitude do movimento de R para A . Neste, fica evidente a ação da força restauradora $F(x) = -kx$ que age na massa m no sentido de restaurar a posição de equilíbrio estável $x = 0$. Como nós estamos tratando apenas as oscilações livres do sistema, a consequência disso é que a massa fica oscilando em torno de $x = 0$ com frequência angular ω constante.

A análise que fizemos para as oscilações livres do MHS pode ser estendida para sistemas mais reais em que é possível considerar o sistema amortecido, forçado ou ambos. Nestes casos o equacionamento torna-se um pouco mais complicado, mas é possível introduzir as equações de movimento aos alunos para discutir os movimentos graficamente e comparar com fenômenos observados no dia a dia deles.

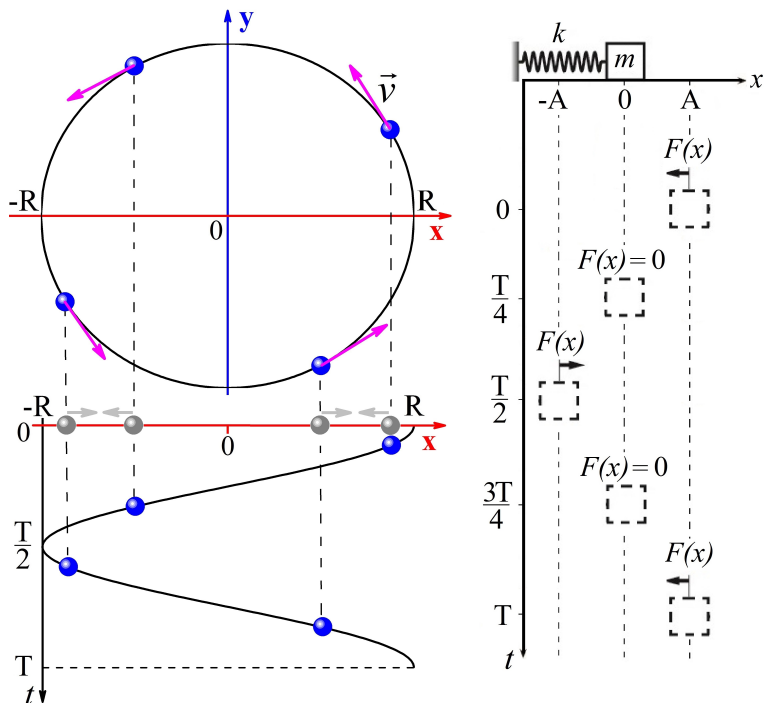


FIGURA 8.2: À esquerda mostramos uma partícula em movimento circular uniforme com velocidade \vec{v} e sua projeção (cinza) no eixo x . Note que a partícula se desloca em x entre $-R$ e R , ou seja, a amplitude do movimento é dada por R . Abaixo é mostrado a evolução no tempo desta projeção, $x(t)$ vs. t . À direita observa-se que o movimento da projeção da partícula no eixo x , mostrado à esquerda, é o mesmo de uma massa presa a uma mola se movendo entre $-A$ e A . Em ambos os casos o eixo do tempo t foi colocado na vertical apontando para baixo, com o sistema evoluindo em um tempo total de um período T , ou seja, de $t_0 = 0$ à $t = T$.

Para o oscilador amortecido, por exemplo, acrescentamos o termo de amortecimento dado por $-\rho v$ na lei de Hooke, ou seja, $F = -kx - \rho v$. Neste caso o professor deve conduzir uma discussão sobre tudo que aparece de novo com relação à descrição do movimento para oscilações livres. A posição do oscilador amortecido com relação ao tempo é dada por,

$$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \phi). \quad (8.3)$$

Note que agora a amplitude do movimento depende do tempo, sendo dada por $Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}$, e diminui exponencialmente. Esta seria uma oportunidade para discutir o papel da função exponencial em modelos matemáticos que descrevem diversos outros sistemas. A frequência ω neste caso será diferente da frequência das oscilações livres, mas de que forma? Poderíamos introduzir também as oscilações forçadas ou forçadas amortecidas e discutir o fenômeno de ressonância em ambos os casos. Poderíamos estender o assunto ainda mais descrevendo a energia do oscilador e sua conservação nestas diferentes situações, entre muitas outras possibilidades. Ou seja, com um único sistema físico é possível cobrir

muitos tópicos sobre mecânica clássica.

Acreditamos que o aprendizado no ensino médio está alicerçado no desenvolvimento de técnicas e habilidades do aluno e não na quantidade de conteúdo transmitida. As vezes não há tempo viável para transmitir todo o conteúdo necessário para prestar o vestibular ou o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), que é o foco principal deste nível de ensino na maioria das escolas. Porém, se o aluno aprender a analisar criticamente um problema e saber utilizar as técnicas necessárias com o auxílio da matemática com apenas alguns tópicos sobre o assunto, já terá valido à pena.